

השפעת המסה על רוכב אופניים במורד- האם קיים יתרון לכבדים?

חזי יצחק, גיל ברן
תיכון לחינוך סביבתי, מדרשת שדה בוקר
1 המכון לחקר המדבר, אוניברסיטת בן גוריון בנגב
דוא"ל: yiyeh@bgu.ac.il

תקציר:

במסגרת לימודי המכניקה בתיכון, אנו דנים בין היתר בחיכוך סטטי וקינטי הפרופורציונים לכח הנורמלי. בהשפעת כוחות חיכוך אלו הגוף נע במורד מדרון משופע לא חלק בתאוצה קבועה שאינה תלויה במסה. מסקנה זו אינה תקפה למקרים בהם כח החיכוך תלוי במהירות כמו בתנועה של גופים דרך זורמים (לדוגמה טיפות של גשם הנופלות לארץ). במקרה כזה הגוף ינוע בתאוצה הקטנה עם הזמן ואחר כך במהירות קבועה משום ששקול הכוחות שיפעלו עליו יתאפס. המהירות הגבולית הזו תלויה בתלות של כח החיכוך במהירות ובפרמטרים גיאומטריים הקובעים את גודלו של כח החיכוך. במאמר זה אנו מראים שתופעה דומה מתרחשת גם עבור אופניים הגולשות במדרון בעל שיפוע קבוע וכמו כן חקרנו את הקשר בין המהירות הגבולית של האופניים למסה באמצעות אופניים שעליהם הותקנה מערכת חיישנים משוכללת ההופכת אותם למעבדה ממוחשבת.

1. הקדמה

על המערכת אופניים+רוכב הנמצאת בתנועה בקו ישר פועלים מספר כוחות. חשוב להדגיש שמערכת זו אינה גוף נקודתי ויש חשיבות גם לנקודת האחיזה בה פועלים הכוחות. באמצעות סיבוב הפדלים הרוכב מפעיל מומנט סיבוב המסובב את גלגל השיניים הקדמי (שנקרא גם גלגל מניע) ובאמצעות השרשרת, ההנעה עוברת לגלגלי השיניים האחוריים המחוברים לגלגל האחורי. הגלגל האחורי מסתובב ומפעיל כח חיכוך על הקרקע שכיוונו אחורה. על פי החוק השלישי של ניוטון הקרקע מפעילה כח שווה אך בכיוון הפוך על האופניים וזהו למעשה הכח שמניע את האופניים. באיור 1, משורטטים הכוחות הפועלים על האופניים המתקדמים בקו ישר בעלייה.



איור 1: הכוחות הפועלים על המערכת אופניים+רוכב הנעים בקו ישר במעלה מישור משופע. המשקל פועל ממרכז המסה של המערכת והכוחות הנורמליים פועלים בנקודות המגע של הצמיגים עם האופניים. הכח המניע את האופניים הוא למעשה כח החיכוך שהקרקע מפעילה על הגלגל האחורי. על האופניים פועלים שני כוחות חיכוך עיקריים. האחד הוא כח החיכוך עם האוויר והשני הוא כח החיכוך בין הגלגלים לקרקע. כח החיכוך הפנימי הפועל בצירי הגלגלים הוא קטן והוא מוזנח.

נוכל לרשום את משוואת התנועה של האופניים (Wilson 2004; Kyle 2003) באופן הבא:

$$ma = F_p - (F_A + F_S + F_R) \quad .1$$

כאשר F_p הוא הכח המניע את האופניים, F_A הוא כח ההתנגדות של האוויר, F_S הוא כח ההתנגדות הנובע משיפוע הדרך, F_R הוא כח חיכוך הגלגול הנובע מדפורמציה של הצמיג והקרקע. m היא מסת הרוכב והאופניים ו- a היא תאוצת הרוכב והאופניים. הכוחות החשובים בכביש יחסית חלק, הם כח ההתנגדות של האוויר וחיכוך הגלגול. כח החכוך עם האוויר נובע מדחיפת האוויר הצידה בעת התקדמות האופניים ויצירת לחץ אוויר גבוה לפני הרוחב ולחץ אוויר נמוך מאחורי הרוכב וכן מחיכוך של האוויר הנע על שטחי הפנים של הרוכב והאופניים. הנקודה החשובה היא שכח זה תלוי **בריבוע מהירות האופניים**. ומעל מהירות של 15 קמ"ש (Kyle, 1986) כח זה הופך לדומיננטי. באופן מדויק יותר ניתן לרשום את כח ההתנגדות של האוויר באופן הבא:

$$F_A = K_d(v + v_w)^2 \quad .2$$

כאשר v היא מהירות האופניים ביחס לקרקע ו- v_w היא מהירות הרוח ($v_w > 0$ עבור רוח נגדית). המקדם K_d תלוי בשטח חתך של הרוכב והאופניים בניצב לכיוון התנועה - A , בסוג האופניים ובצפיפות האוויר ונתון על פי הביטוי הבא (Hennekam 1990):

$$K_d = \frac{1}{2} c_d A \rho \quad .3$$

מקדם הגרר c_d (מקדם חסר מימדים) הוא כמעט קבוע ובקירוב ראשון אינו תלוי במהירות. מקדם הגרר נובע בעקר מהתפתחות מערבולות אוויר מאחורי האופניים הנעים. לדוגמה עבור אופני ספורט $c_d = 1.0$ כאשר הרוכב זקוף וערכו קטן ל-0.9 כאשר הרוכב כפוף. שטח חתך טיפוסי של רוכב במצב זקוף הוא $A = 0.4 \text{ m}^2$. ρ היא צפיפות האוויר וערכה בגובה פני הים הוא 1.2 kg/m^3 . באמצעות נתונים נוכל לחשב את כח התנגדות האוויר עבור רוכב אופני ספורט (במצב זקוף) הנע במהירות 36 קמ"ש (10 מטר לשנייה) ללא רוח:

$$F_A = 0.5 \times 1.0 \times 0.4 \times 1.2 \times 10^2 = 24 \text{ N} \quad .4$$

חיכוך הגלגול תלוי בכוחות הנורמליים הפועלים על כל גלגל, ובמקדם חיכוך גלגול c_r התלוי בלחץ האוויר, בשטח וצורת החתך של הצמיג, בקוטר הגלגל וכן במשטח עצמו. בקירוב נוכל לאחד את שני הכוחות הנורמליים לכח אחד N ולרשום את חיכוך הגלגול הפועל על שני הגלגלים ביחד באופן הבא:

$$F_R = c_r N \quad .5$$

עבור אופני מירוץ ערך טיפוסי של מקדם חיכוך גלגול הוא $c_r = 0.003$. לדוגמה עבור מסה כוללת של 85 ק"ג כח חיכוך הגלגול במישור יהיה:

$$F_R = 0.003 \times 85 \times 9.8 = 2.50 \text{ N} \quad .6$$

כדאי לשים לב שכח חיכוך הגלגול אינו תלוי במהירות (בקירוב) בעוד שכח התנגדות האוויר תלוי בריבוע המהירות. עובדה זו היא בעלת חשיבות מכרעת למהירות האופניים. כדי להגיע למהירויות גבוהות יש להקטין את כח התנגדות האוויר על ידי שיפור הצורה האווירודינמית של האופניים (הקטנת c_d). עושים זאת על ידי בניית מעטפת מיוחדת מסביב לאופניים בהם הרוכב נמצא במצב של ישיבה. אופניים כאלו נקראות בשם הכללי HPV שפירושו Human Powered Vehicles ומידי שנה נערכות תחרויות שבהן מנסים לשבור את שיא המהירות במישור או לשבור את שיא המרחק שניתן לעבור בשעה¹. רוכבים תחרותיים מקטינים את התנגדות האוויר על ידי רכיבה בטור כאשר הרוכבים צמודים האחד לשני, מה שנקרא בשפה המקצועית Drafting, במקרה זה הרוכבים מאחור חוסכים כ-20% מהאנרגיה שהייתה דרושה להם לו רכבו לבד (ראה איור 2). בשל העובדה שכח החיכוך עם האוויר גדל כמו v^2 , הרי ההספק הנדרש כדי להתגבר עליו יגדל כמו v^3 , וזו הסיבה למאמצים הרבים המושקעים בהקטנתו.

עבור אופניים הגולשים במדרון שזווית שיפועו היא α משוואת התנועה של האופניים היא (Hennekam and Bontsema, 1991):

$$m \frac{\partial v}{\partial t} = mg(\sin \alpha - c_r \cos \alpha) - K_d v^2 \quad .7$$

המהירות הגבולית v_i תתקבל כאשר תאוצת האופניים תתאפס כלומר יתקיים השוויון הבא: $mg(\sin \alpha - c_r \cos \alpha) = K_d v_i^2$ ולכן נקבל עבור v_i :

¹ פרטים נוספים על ההיסטוריה והמכניקה של אופניים אלו ראה <http://home19.inet.tele.dk/badbirk>

$$v_t = \sqrt{\frac{mg(\sin \alpha - c_r \cos \alpha)}{K_d}} \quad .8$$

הפתרון של המהירות כפונקציה של הזמן נתון על ידי:

$$v(t) = \gamma \tanh(\psi + t / \sigma) \quad .9$$

כאשר $\gamma = \sqrt{F_0 / K_d}$, $F_0 = mg(\sin \alpha - c_r \cos \alpha)$, $\sigma = m / \sqrt{F_0 K_d}$. הקבוע ψ נקבע על פי המהירות ההתחלתית ועל פי הקשר: $v(0) = \gamma \tanh \psi$.



איור 2: תופעת Drafting בתעופת עגורים, רוכבי אופניים ובמכוניות מירוץ. המטרה היא לנוע בצמוד ומאחור לגוף הנע כדי להימצא באזור בו התנגדות האוויר היא קטנה וכך לחסוך באנרגיה. בדוגמה של האופניים, הרוכב מאחור יכול לחסוך עד 30% בהספק לעומת רכיבה באותה מהירות אבל לבד (Broker et al., 1999).

משוואת התנועה של אופניים בעלייה במשור משופע תהיה:

$$m \frac{\partial v}{\partial t} = -mg(\sin \alpha + c_r \cos \alpha) - K_d v^2 \quad .10$$

בהנחה שמהירות הטיפוס היא קטנה (העלייה תלולה), ניתן להזניח את החיכוך עם האוויר ובהנחה שהרוכב משקיע הספק קבוע, מהירותו תקטן ביחס ישר למסה. בעליות מתונות שבהן לא ניתן להזניח את החיכוך האוויר, עדיין תוספת הזמן בעלייה תהיה גדולה יותר מאשר הרווח בירידה בעיקר. לכן בדרך עם עליות וירידות הזמן הכולל גדול יותר מאשר זמן הרכיבה של אותו מרחק על גבי מישור. לדוגמה רוכב אופניים המתקדם במהירות קבועה של 40 קמ"ש יעבור מרחק של 40 ק"מ ב-60 דקות. עבור דרך המורכבת מ-20 ק"מ של עלייה מתונה בא הרוכב נע במהירות של 35 קמ"ש והחצי השני הוא ירידה מתונה בה הוא רוכב במהירות של 35 קמ"ש, הזמן הכולל יהיה ארוך בדקה (Swain, 1997) .

2. תיאור מערכת הניסוי.

כדי לחקור את השפעת המסה על המהירות הגבולית של אופניים במורד השתמשנו באופני הרים שעליהם הותקנה מערכת של חיישנים ואיסוף מידע Polar 725s בתוספת האופציה למדידת מד הספק. מערכת זו המתוארת באיור 3 מסוגלת למדוד ולאגור נתונים ברזולציה מרבית של 5 שניות. המערכת מסוגלת למדוד את מהירות האופניים, קצב סיבובי הפדלים, את הגובה מעל פני הים, ואת ההספק המושקע על ידי הרוכב על ידי הכפלת מתיחות השרשרת במהירותה וכן את הדופק באמצעות חגורת חזה המשדרת את הנתונים ליחידה המותקנת על האופניים. מערכת זו היא אחת מארבע מערכות למדידת הספק שקיימות היום בשוק ומחירה יחסית נמוך ורמת הדיוק שלה גבוהה. בניסוי זה לא השתמשנו בפונקציה זו של מדידת ההספק (ההספק של הרוכב בגלישה במורד הוא אפס), אך נצלנו את היכולת שלה לדגום את המהירות הרגעית של האופניים כל 5 שניות. את המסה שינינו על ידי הוספת משקולות של חדר כושר (השתמשנו גם בפטיש וגם בכדור ברזל) לתרמיל גב שאותו נשא הרוכב. הגענו לתוספת מסה מכסימלית של 40 ק"ג. איתרנו כביש ששיפועו היה בקירוב קבוע וכן נפח התנועה עליו היה קטן- קטע הכביש העולה מצומת ציפורים לרמת מטרד כ- 8 ק"מ מדרום למדרשת שדה בוקר. את הניסוי ערכנו לפני הצהריים, כדי לצמצם את השפעת את השפעת הרוח, שכן אחר הצהריים מנשבות באיזור רוחות מערביות שמהירותן כ-6 מטר לשנייה. ע"פ משוואה 8, המהירות הגבולית גדלה ביחס לשורש הריבועי של מסת המערכת אופניים ורוכב, ומטרתנו הייתה לבדוק עד כמה קשר זה עובד במציאות.



איור 3: תיאור סכימטי של מערכת Polar 725s למדידת הספק. הנתונים השונים נאגרים בשעון המורכב על האופניים וניתן להוריד אותם באמצעות חיבור אינפרא אדום למחשב הנייד.

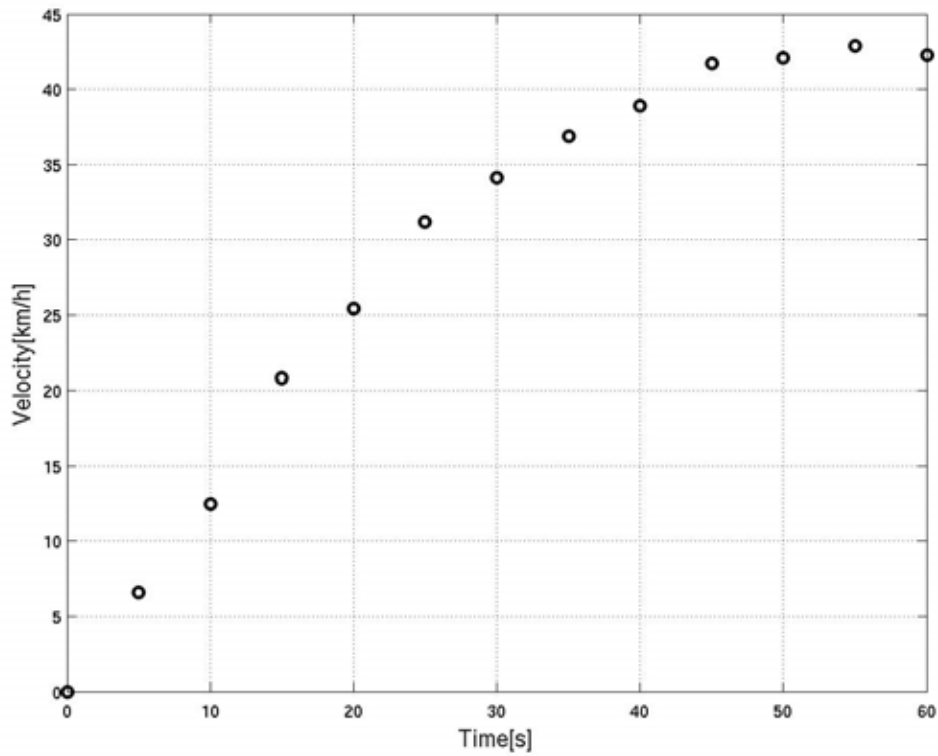
איור 4 מתאר את הכביש בו בוצע הניסוי. המדידה התבצעה לאורך קטע 600 מטר והפרש הגובה בין נקודת ההתחלה והסיום היה כ- 35 מטרים כלומר שיפוע בן 3.34°.

3. תוצאות

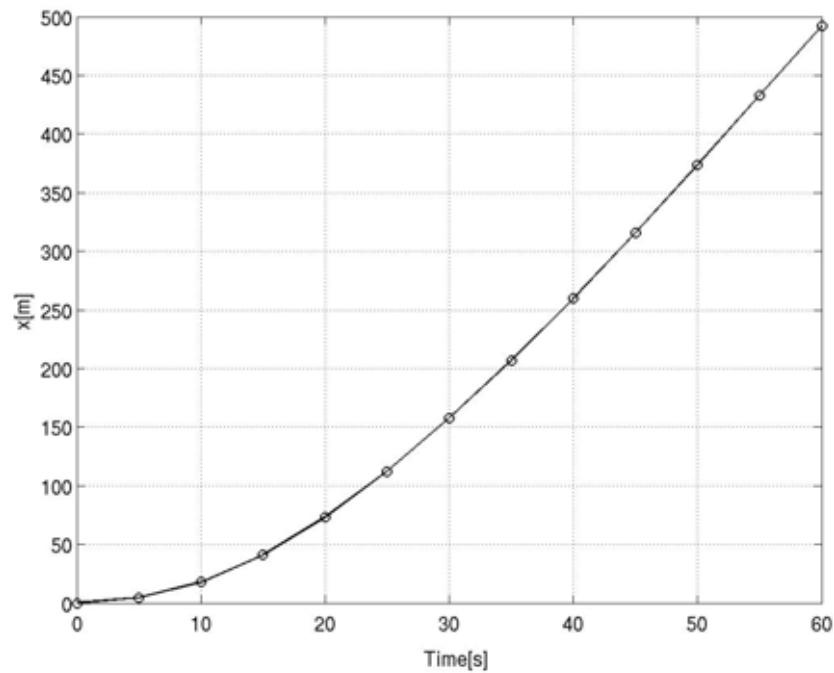
איור 5 מתאר דוגמה של גרף המהירות כפונקציה של הזמן עבור רכיבה במסה של 106.4 ק"ג. מהגרף ניתן לראות שבתחילה מהירות האופניים גדלה בקצב ההולך וקטן, כלומר התאוצה קטנה עם הזמן ולאחר כ-50 שניות היא מגיעה בקירוב למהירות הגבולית כ-42 קמ"ש והתאוצה מתאפסת. את ההעתק כפונקציה של הזמן ניתן לקבל ע"י אינטגרציה נומרית של המהירות לפי הזמן. איור 6 מתאר את ההעתק כפונקציה של הזמן במהלך הרכיבה במורד. ניתן לראות שבחלק האחרון של התנועה מתקבל קו ישר המעיד על כך שהאופניים הגיעו בקירוב למהירות קבועה.



איור 4: ביצוע הניסוי במורד הכביש המוביל מבסיס רמון לצומת ציפורים, מדרום למדרשת בן גוריון. השיפוע בקטע שנבחר הוא בקירוב קבוע, ונפח התנועה על כביש זה הוא קטן. כדאי לבצע את הניסוי מוקדם בבוקר כדי להקטין את השפעת האוויר על תוצאות הניסוי. רצוי גם שאורך קטע הכביש יהיה לפחות חצי ק"מ.



איור 5: תוצאות מדידת מהירות האופניים במורד ביחידות של קמ"ש כפונקציה של הזמן (שניות), עבור ניסוי גלישה במורד. האופניים נעים בתנועה בתאוצה ההולכת וקטנה וזאת משום שכאשר מהירות האופניים גדלה, כח החיכוך עם האוויר גדל. לאחר כ-50 שניות הכח השקול הפועל על האופניים מתאפס ולכן האופניים ימשיכו להתקדם במהירות קבועה שבמקרה זה היא כ-42 קמ"ש. בניסוי המתואר בגרף, מסת הרוכב+האופניים הייתה 106.4 ק"ג.



איור 6: ההעתק כפונקציה של הזמן עבור התנועה שתוארה באיור 5. ההעתק חושב באופן נומרי על ידי חישוב האינטגרל של המהירות שנמדדה ע"י מערכת ה-Polar.

בניסוי הגדלנו את המסה במרווחים של 5 ק"ג. הקפדנו גם לרכב באותה תנוחה כדי לא לשנות את מקדם הגרר. תוצאות הניסוי מובאות בטבלה 1:

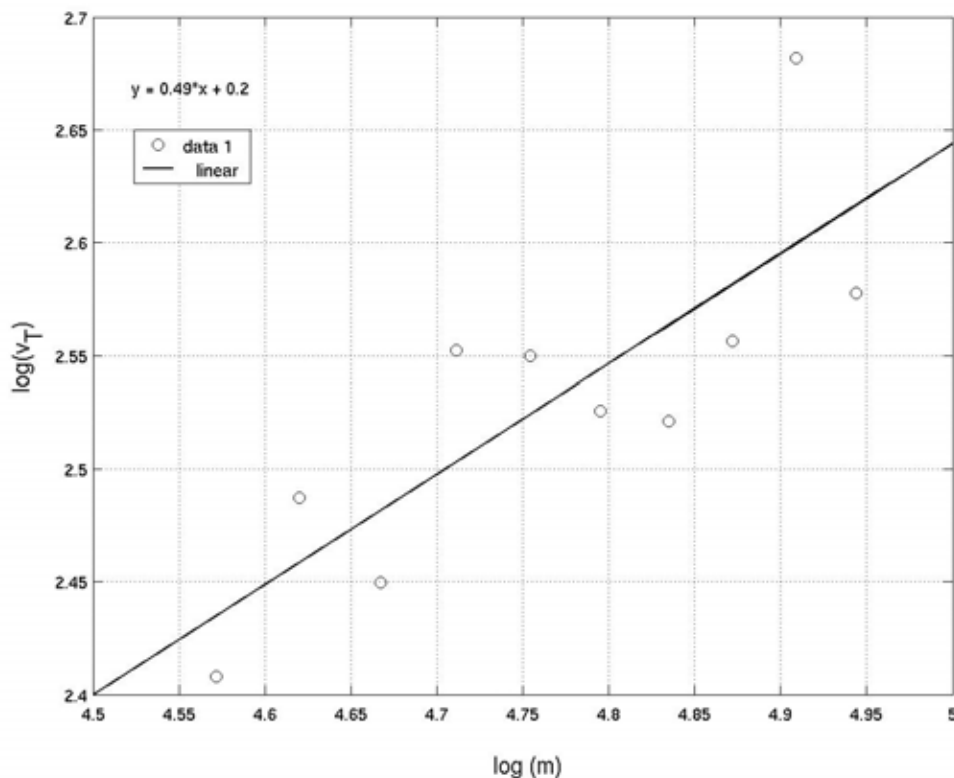
מהירות סופית (km/h)	מסה כוללת של הרכב והאופניים (kg)
40.0	96.7
43.3	101.5
41.7	106.4
46.2	111.2
46.1	116.1
45.0	120.9
44.8	125.8
46.4	130.6
52.6	135.5
47.4	140.3

טבלה 1: הטבלה מציגה את המהירות הסופית שהתקבלה בגלישה במורד עבור מסות שונות. הניסוי נמשך כשעה וחצי ומידי פעם היו משבי רוח שהשפיעו על המהירות הסופית וגרמו לפיזור התוצאות.

באיור 7, בו בחרנו לשרטט את $\ln(v_T)$ כפונקציה של $\ln m$. ע"פ משוואה 7 משוואת הישר היא:

$$\ln v_T = \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} \left[\frac{g(\sin \alpha - c_r \cos \alpha)}{K_d} \right] \quad .11$$

שיפוע הקו הישר הוא 0.49 קרוב מאד לשיפוע התיאורטי 0.5. פיזור הנקודות נובע בעיקר מאי דיוקים הנובעים ממשבי רוח פתאומיים שנשבו במהלך הניסוי. תנאי השטח, אינם מאפשרים כמובן תנאים אופטימליים לניסוי משום שהרוח אינה קבועה, לא בעוצמתה ולא בכיוונה. משבים אלו של רוח שמהירותם יכולה להגיע ל-5 מטר לשנייה הם אופייניים לזרימה טורבולנטית באטמוספירה (Pye and Tsoar, 1990). אנחנו בצענו את הניסוי בשעות הצהריים וכדי להקטין עוד יותר את השפעת הרוח, כדאי היה לבצע את המדידות מוקדם בבוקר לפני התחממות האוויר. משום שהתנגדות האוויר היא פרופורציונית לריבוע מהירות האופניים ביחס לאוויר, הרוח יכולה להשפיע באופן ניכר על המהירות הגבולית של האופניים. אי דיוקים נוספים יכולים לנבוע משינויים קטנים בתנוחת הרוכב שקשה מאד לשמור עליה באופן מדויק. כמו כן הזנחנו בניתוח התוצאות את הגדלת מקדם חיכוך הגלגול כתוצאה מהגדלת המשקל, אך במהירויות גבוהות חיכוך הגלגול זניח ביחס לחיכוך עם הרוח (Kyle, 2003).



איור 7. גרף של $\log(v_T)$ כפונקציה של $\log(m)$ עבור ניסוי גלישה במורד. שיפוע הקירוב הליניארי הוא 0.49 קרוב מאד לשיפוע התיאורטי שהוא 0.5. משוואת הקירוב הליניארי היא: $\ln v_T = 0.49 \ln m + 0.2$.

4. סיכום

אופניים המצוידים במערכת חיישנים מסוג Polar 725s מהווה מעין מעבדה ממוחשבת המשתפת את הרוכב באופן אקטיבי בביצוע הניסוי ומכאן הפוטנציאל הדידקטי הטמון בה להוראת מדעים. באמצעות האופניים ניתן לבצע סדרת ניסויים שתלווה את תוכנית לימודי המכניקה בכיתה י"א כולל את הפרקים הדנים בעבודה ובאנרגיה וזאת על שימוש באופציית מדידת ההספק (שלא הדגמנו במאמר זה). התלמיד יוכל לבצע מדידות על גופו וע"י כך להגדיל את העניין והמוטיבציה שלו בלימודי הפיזיקה. במאמר זה הראינו כיצד משפיעה המסה על המהירות הגבולית של אופניים המחליקות במדרון. בדרך כלל במהלך שיעורי הפיזיקה, אנו דנים במערכות בהם כח החיכוך הוא פרופורציוני לכח הנורמלי ואז המהירות אינה תלויה במסה. אולם עבור גופים הנופלים באטמוספירה, כח החיכוך עם האוויר הוא דומיננטי ותלוי בריבוע מהירות הגוף. במקרה זה גופים כבדים יותר נופלים מהר יותר. הראינו שבקירוב טוב למדי, המהירות הגבולית של האופניים גדלה ביחס ישר לשורש הריבועי של המסה ולכן יש יתרון לרוכבים כבדים בירידות, אבל יתרון זה הוא בעוכריהם בעליות ולכן בדרך כלל המנצחים בתחרויות כמו הטור דה פראנס הם המטפסים הטובים ביותר מבין כל הרוכבים ומשקלם הוא פשרה בין מסת שרירים גדולה לבין מסה נמוכה.

תודות

עבודה זו היא חלק מפרויקט "פיזיקה על גלגלים" המתבצע במדרשת שדה בוקר ובתמיכת הקרן לעידוד יוזמות חינוכיות וקרן יק"א בישראל. מידע נוסף באתר "באופן אחר" biking.boker.org.il.

5. ביבליוגרפיה

Broker, J. P., et al. (1999). Racing cyclist power requirement in the 4000-m individual and team pursuits. *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 31, 1677-1685.

Hennekam, W. and J. Bontsema (1991). Determination of F_r and K_d from the solution of the equation of motion of a cyclist. *European Journal of Physics*, 12, 59-63.

Kyle, C. R. (2003). Mechanical factors affecting the speed of a bicycle. In *Science of Cycling* (edited by E. R. Burke), pp. 123-136. Champaign, IL, Human Kinetics.

Kyle, C. R. (2003). Selecting cycling equipment. In *High-Tech Cycling*, Edited by E. R. Burke, pp. 1-48. Human Kinetics, Champaign, IL.

Pye, K. and H. Tsoar (1990). *Aeolian sand and dunes*. Unwin Hyman, London.

Swain, D. P. (1997). A model for optimizing cycling performance by varying power on hills and in wind. *Medicine and Science in Sport and Exercise*, 29, 1104-1108.

Wilson, D. G. (2004). *Bicycling Science*, Third Edition. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.